

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی دوازدهم بهمن نودونه

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **گراف ساده - دوازدهم ریاضی دو دبیرستان بوعلی شیراز**

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

سید الهام العظمی الحامی

سدام، وقت بخیر

این صیغه گسسته دوازدهم یعنی ۲

دبیر مدرسه ک بوعلی کیا از

آدرس: نجف نجف کهن فوده ریز

مصنوع:

گراف سازه

مزبان حبیبی





مثال: مجموعه پنج عضوی  $\mathcal{V} = \{a, b, c, d, e\}$  چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

تمام زیر مجموعه های دو عضوی  $\mathcal{V}$  را بنویسید:

$$\mathcal{M} = \left\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\} \right\}$$

مزبان حبیبی

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$M \equiv$  مجموعه همه زیر مجموعه ها از اعضای  $V$

$$n(M) = 10$$

سؤال:  $M$  داشته ل بیتن، چند زیر مجموعه دارد؟

$$2^{n(M)} = 2^{10} = 1024$$

مزبان حبیبی





$$V = \{a, b, c, d, e\} \checkmark$$

$$M = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \dots, \{d, e\} \}, \quad |M| = 10$$

$$M \text{ تعداد زیر مجموعه ها} = 2^5 = 1.24$$

تک زیر مجموعه از  $M$  بنف سیه .

$$\checkmark E = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{c, d\} \} \subseteq M$$

سوال: ساختار زوج مرتب  $(V, E)$  شرح دهید ::

مزبان حبیبی



$(V, E)$

مثال:  $V = \{1, 2, 3, 4\}$

$M = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$

$|M| = \binom{4}{2} = 6$

$E = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \subseteq M$

هر عضو  $E$  یک زیر مجموعه دو عضوی از  $V$  است.



تعریف: اگر  $\mathcal{G}$  یک مجموعه دلخواه (خالی نباشد) باشد آنرا  $\mathcal{G}$  از جبریت

$(\mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{G}$  را یک گراف  $\mathcal{G}$  می گویند، اگر هر عضو  $\mathcal{E}$  یک یز

مجموعه دو عضوی از  $\mathcal{V}$  باشد.

یعنی:  $x \in \mathcal{E} \Rightarrow x \subseteq \mathcal{V}, |x| = 2$

مزبان حبیبی





$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad = \text{ماتل}$$

$$E = \{ \underline{12}, 13, 14, 34, 23 \}$$

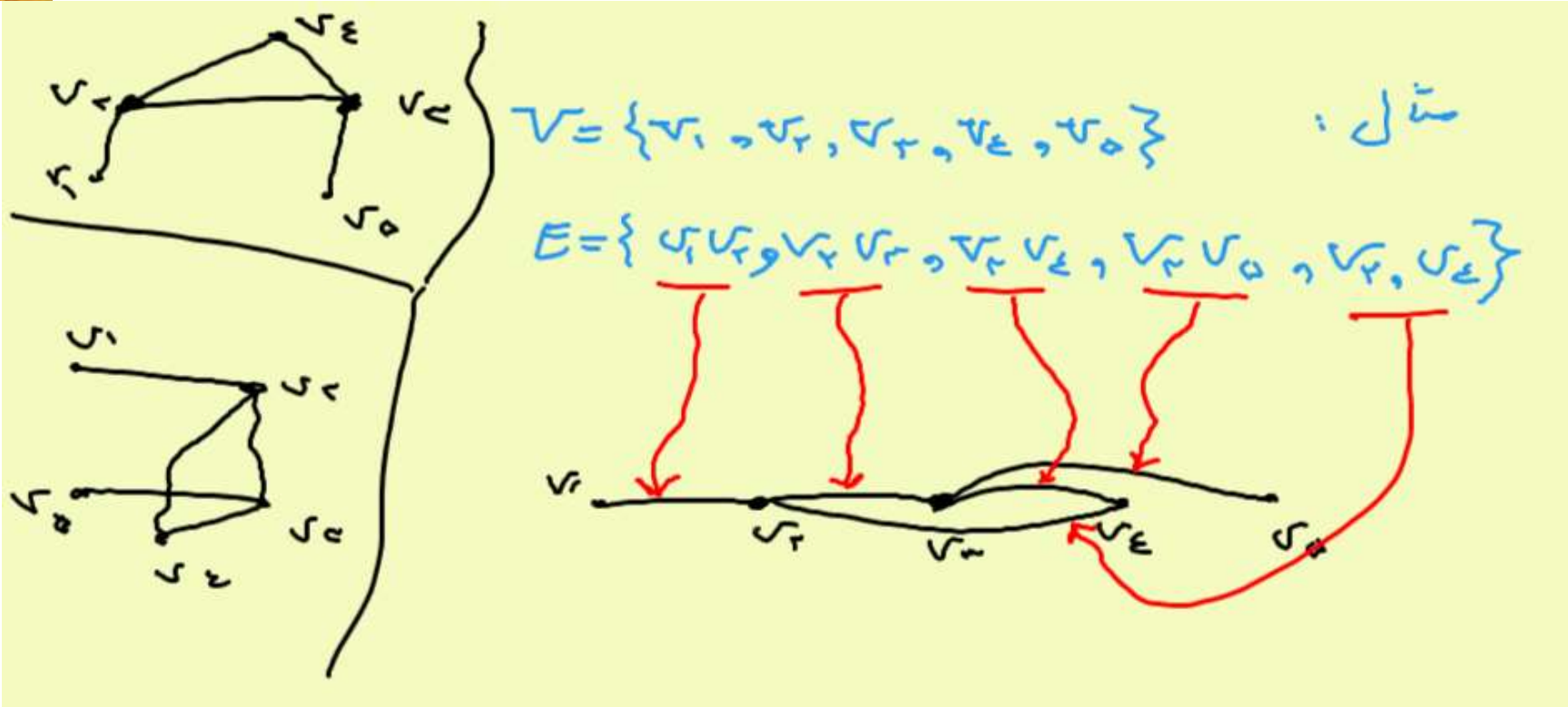
$$G = (V, E)$$



مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی





قرارداد :

اگر  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{C}$  یک براف  $\mathcal{C}$  باشد،

۱) هر عضو  $\mathcal{A}$  یک رأس می گویند و تعداد را چهار است تجه براف می نامیم (P)

۲) هر عضو  $\mathcal{B}$  یک بال می گویند و تعداد یا اندازه براف می نامیم (Q)

مزبان حبیبی

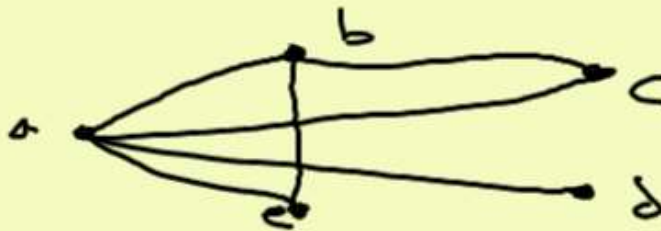


مسئله: اگر  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و  $E = \{\underline{ab}, \underline{ac}, \underline{ad}, \underline{ae}, \underline{bc}, \underline{cd}\}$

الف) گراف  $G = (V, E)$  را رسم کنید. ب) مرتبه و اندازه را بدوید و آن را نام ببرید.

مرتبه  $\rho = 5$

اندازه  $q = 6$



مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



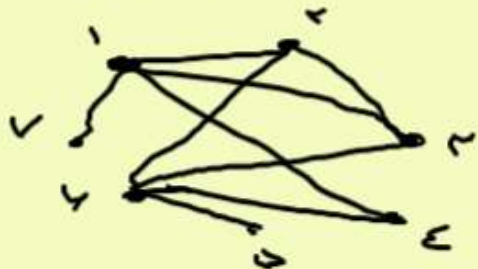
مسئله: گراف زیر را در نظر بگیرید.

گراف همبندی و اندازه گراف را مشخص کنید.

انتهای گراف،  $V$  و  $E$  را بنویسید.

$$P=7, q=4$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

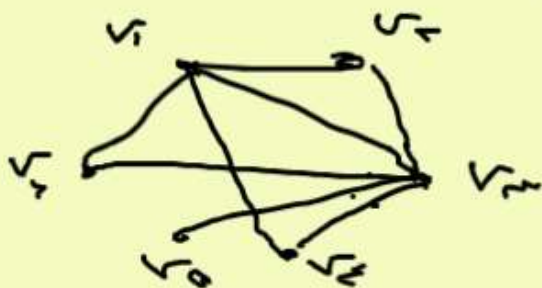


$$E = \{12, 13, 14, 17, 23, 24, 34, 44, 56, 67\}$$



درجه راس: تعداد ی‌های متصل به هر راس را درجه آن درسی می‌گویند.

درجه راس  $v_i$  را  $\deg(v_i)$  نشان می‌دهیم.



$$\deg(v_1) = 7$$

$$\deg(v_2) = 6$$

$$\deg(v_3) = 6$$

$$\underline{\underline{S: 7, 6, 6, 2, 2, 2, 1}}$$

$$\deg(v_4) = 2$$

$$\deg(v_5) = 1$$

$$\deg(v_6) = 2$$

$$p = 7, \quad \underline{\underline{q = 12}}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حسین نجاری

۱۳۹۰

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام ، وقت بخیر

ریاضیات گسسته دوازدهم، فصل ۲

دیرینه نوبعلی رسم از

کتاب دوازدهم کجمن نوره رفته ... ۱۳:۰۰

مصنوع :

ادامه های از ترافها

مره ن  
حصی

مزبان حبیبی





بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



رایج‌های مجاور (همایه) :

دو راس که دو سر یک یال هستند را دو راس مجاور می‌گویند.

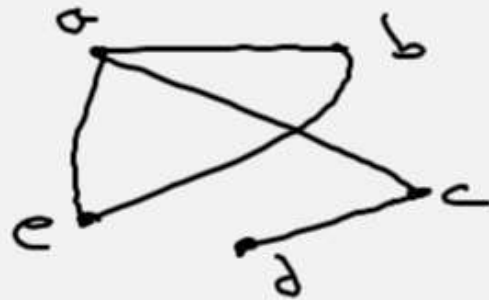
یالهای مجاور :

دو یال که به یک راس متصل هستند.

مزبان حبیبی



مثال:



حداکثر  $a, b, c$  مجاورند.

دو رأس  $a, c$  مجاور نیستند.

دو یال  $a, e$  و  $a, c$  مجاورند.

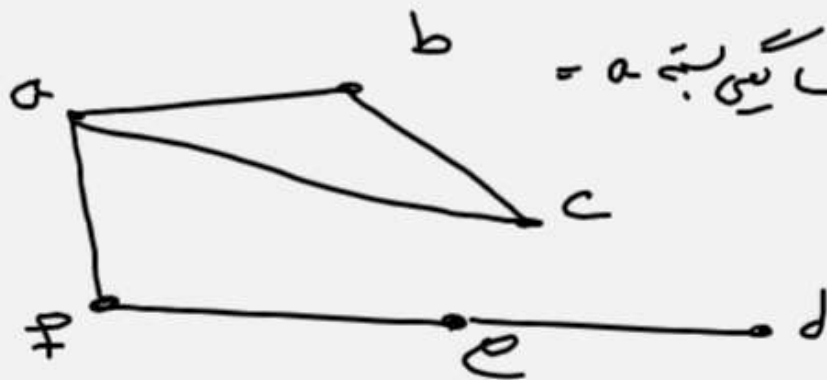
دو یال  $a, b$  و  $c, d$  مجاور نیستند.

مزبان حبیبی



تعریف: فرض کنید  $G$  یک راس از گراف  $G = (V, E)$  باشد.

الف) مجموعه راس‌های هم‌جایه با  $a$  را با  $N_G(a)$  نشان می‌دهیم. (هم‌جایی با  $a$ )



ب) هم‌جایی با  $a$   $\equiv N_G(a) \cup \{a\}$   
 $= N_G[a]$

مثال:

$N_G(a) = \{b, c, f\}$

$N_G[a] = \{a, b, c, f\}$

$N_G(d) = \{e\}$ ,  $N_G[e] = \{d, e\}$

$N_G(b) = \{a, c\}$      $N_G[b] = \{b, c, a\}$





سؤال: اگر  $H$  یک زیرگروه از  $G$  باشد، چه می توان گفت؟

جواب: آن را **زیرگروه** می گویند.

یعنی:  $H$  یک زیرگروه از  $G$  است اگر  $H$  یک زیرمجموعه از  $G$  باشد و

ناتناهی

$$N_G(d) = \{ \}$$
$$N_G[d] = \{d\}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نتیجه: درجه بندی راس صفر است آرد و تمام درجه های راس، یک طغری است.  
توجه: همایس بهجه راس، هرگز نمی  
و حداقل یک عضو دارد.

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بزرگترین و کوچکترین درجه:

در صورت  $G = (V, E)$ ، بزرگترین درجه را با  $\Delta$  و کوچکترین درجه را با  $\delta$  نشان می دهیم.

کوچکترین درجه  $\delta(G) =$  بزرگترین درجه  $\Delta(G) =$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

$$S \leq \deg(\alpha) \leq \Delta$$

$$S \leq \frac{r}{p} \leq \Delta$$

نگذر:

۱

۲

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



زیرگراف: گراف  $G'(V', E')$  از زیرگراف  $(V, E)$  می گویند  
اگر  $V' \subseteq V$ .

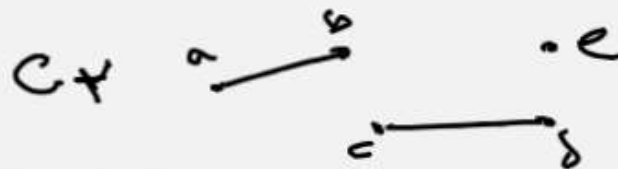
یا: اگر یال و رأسهای از گراف  $G$  را حذف کنیم به نحوی که گراف  
باقی مانده را از زیرگراف  $G'$  می گویند.

توجه: اگر یک رأس را حذف کنیم باید تمام یالهای متصل به آن را حذف کرد.

مزبان حبیبی



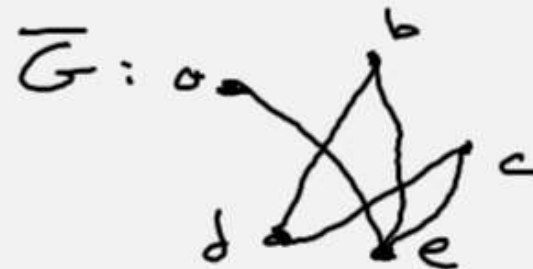
بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مزبان حبیبی



مکمل گراف: منظر نسیم  $(V, E)$  یک گراف ساده است.  
 گراف  $(V, E')$  =  $G$  را همان گرافی گویند که از ح دو اس مجاور در گراف  $G$  در  
 گراف  $G$  مجاور نباشند برعکس.



مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سؤال ۱: اگر  $d_G(n)$  و  $d_G(n)$  به ترتیب درجه  $n$  در دو گراف  $G$  و  $H$  باشد، چند گراف  $G$  و  $H$  که  $d_G(n) + d_H(n) = n$  داشته باشند؟

از تعداد راسهای گراف کمتر  $n-1 = d_G(n) + d_H(n)$

سؤال ۲: گراف  $G$  راسی  $n$  داشته باشد، حداکثر چند یال دارد؟

$$f_{max} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

مزبان حبیبی



قضیه: اگر مرتبه هر اندازه  $v_i$  به ترتیب ۲، ۳، ۴ باشد آن گاه

$$\sum \deg(v_i) = 24$$

اثبات: می دانیم هر یک دقیقاً به دو رأس متصل است پس برای هر  $v_i$

$\sum \deg(v_i) = 24$ ، هر رأس دقیقاً دو بار شمارش می شود یعنی  $\sum \deg(v_i) = 24$

مزبان حبیبی



نتیجه ۱: تعداد یایها، همواره نصف مجموع درجات است.

یا: مجموع درجات رئوس هر حرف س، در برابر تعداد یایهاست.

$\left. \begin{array}{l} P = \text{تعداد درها} \\ q = \text{تعداد یایها} \\ 2q = \text{مجموع درجات} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2q}{p} = \text{میانگین درجه} \\ s = \text{کمترین درجه} \\ \Delta = \text{بیشترین درجه} \end{array} \Rightarrow \Delta \leq \frac{2q}{p} \leq s$	نتیجه ۲:
---	----------

مزبان حبیبی



تکزی: در یک شرف با ۲۱ یال درجه حرارت اس حداقل ۳ ص: ۱۰

این شرف حداکثر چند اس دارد؟  
 $P = ?$ ,  $q = 21$ ,  $\delta = 3$

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta \Rightarrow 3 \leq \frac{2(21)}{p} \Rightarrow p \leq \frac{42}{3} \Rightarrow p \leq 14$$
$$\Rightarrow P_{\max} = 14$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مکزمین بدر کمر افنی با ۱۷ یال، حد اکثر درجه حراری ۵۰ می باشد، این حرارت  
حد اقل ضروری اس دارد؟

تکلیف

$$( 5 \leq \frac{29}{m} \leq 6 )$$

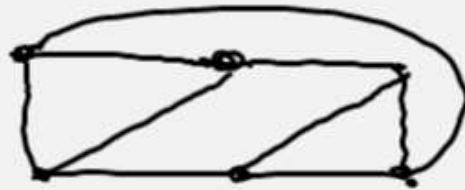
مزبان حبیبی



سگراف کامنتظم:

سگراف ۲ راسی که درجه حر راس اول ۳ و راس ۲، سگراف کامنتظم نامیده می شود.

تعداد سگراف کامنتظم از مرتبه ۶ -



مزبان حبیبی





مثال: گراف ۲ منتظم از مرتبه ۲

۶.



$G_2$



مثال: گراف ۳ منتظم از مرتبه ۴



مزبان حبیبی



$$q = \frac{k \cdot p}{2}$$

نتیجه قبیه بتل: اگر گراف  $k$  منتظم از مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  داریم

اثبات: سبق قبیه بتل:

$$2q = \sum \deg(v_i) = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_p)$$

$$2q = \underbrace{k + k + \dots + k}_{p} = k \cdot p \implies q = \frac{k \cdot p}{2}$$

مزبان حبیبی



حکایت: اگر صرف  $\frac{3}{2}$  صتمتلم از مرتبه  $P$  و انداز:  $q$  داریم  $q = P + 4$   
 $P$  و  $q$  را به یک عدد برای صرف یک خود را رسم کنید.

$$\begin{cases} q = P + 4 \\ q = \frac{3P}{2} \Rightarrow q = \frac{3P}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3P}{2} = P + 4 \Rightarrow 3P = 2P + 8$$

$$\Rightarrow 3P - 2P = 8 \Rightarrow \boxed{P = 8} \Rightarrow q = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

مزبان حبیبی



گراف کامل:  $(K_p)$

گراف  $p$  راسی که درجه هر راس آن  $(p-1)$  است.

یا: گراف  $p$  که هر دو راس آن به هم وصلند.

$K_1$  : شکل



$K_2$



$K_3$



$K_4$



$K_5$



مزبان حبیبی



مگرین: ثابت کنید  $\varphi(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$

اثبات:  $2\varphi = \sum \deg(v_i) \Rightarrow 2\varphi = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_p)$

$\Rightarrow 2\varphi = \underbrace{(p-1) + \dots + (p-1)}_{p}$

$\Rightarrow 2\varphi = p(p-1)$

$\Rightarrow \varphi = \frac{p(p-1)}{2}$

مزبان حبیبی



مثال:  $\gamma(k_{10}) = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

$\gamma(k_8) = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

تک‌گانه: تفاوت عدس P را به ازای اختلاف عدس (P+2) را به 15 یا کمتر دارد.

معادله P گانه را به P  
 $\gamma(k_P) = \gamma(k_{P+2}) - 15$

$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{(P+2)(P+2-1)}{2} - 15 \Rightarrow$

$P(P-1) = (P+2)(P+1) - 30$   
 $P^2 - P = P^2 + 3P + 2 - 30$   
 $-4P = -28 \Rightarrow P = 7$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حسین مزبان

۱۳۹۰

مزبان حبیبی

39 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511