

نهی و تنظیم: سیروس نادریان

تابع دوره ای (متناوب):

تابع  $f$  دوره ای (متناوب) است هر گاه یک عدد  $T > 0$  وجود داشته باشد بطوریکه وقتی  $x \in D_f$  ،  $x+T \in D_f$  ،  $f(x+T) = f(x)$  ، کوچکترین مقدار  $T$  را که دارای این خاصیت باشد دوره تناوب تابع می گویند.

نکاتی در مورد تناوب توابع:

۱- اگر  $f(x)$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد، آنگاه توابع  $\frac{1}{f(x)}$  و  $kf(x)$  و  $f(x)+k$  و  $f(x \pm k)$  نیز متناوب و با دوره تناوب  $T$  می باشند.

۲- اگر  $f(x)$  تابعی متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد آنگاه توابع  $f(kx)$  و  $f(kx+a)$  و  $f(kx)+a$  نیز متناوب و با دوره تناوب  $\frac{T}{|k|}$  می باشند.

۳- توابع ساده مثلثاتی متناوبند و :

الف) اگر  $y = \sin ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

ب) اگر  $y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

ج) اگر  $y = \operatorname{tg} ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

د) اگر  $y = \operatorname{cot} ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

۴- توانهای توابع ساده مثلثاتی :

الف)  $y = \sin^{2n-1} ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

ب)  $y = \cos^{2n-1} ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

ج)  $y = \sin^{2n} ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

د)  $y = \cos^{2n} ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

ه)  $y = \operatorname{tg}^n ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

و)  $y = \operatorname{cot}^n ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

۵- در توابع مثلثاتی ، سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت به شرطی که کمان (یا قوس) یک تابع خطی بر حسب  $x$  باشد تابع متناوب است .

و اگر کمان  $x$  دارای ریشگی یا توان غیر از یک باشد یا در مخرج کسر باشد، تابع متناوب نیست .

۶- اغلب توابع جبری مثلثاتی ، متناوب نیستند.

چند مثال :  $y = \sin x^2$  ،  $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$  ،  $y = \cos \sqrt{x}$  ،  $y = x \sin x$  ،  $y = x + \cos x$  متناوب

نیستند .

$$y = \frac{A \cos ax}{B + k \cos ax}, \quad y = \frac{A \sin ax}{B + k \sin ax}, \quad y = A \sin ax + B \cos ax \text{ تابع}$$

$$(A, B \neq 0), \quad T = \frac{2\pi}{|a|}$$

۸- توابع چند جمله ای متناوب نیستند، مگر آنکه ثابت باشند.

۹- هر تابع ثابت متناوب است ولی اگر دامنه اش  $R$  باشد دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

چند مثال:  $y = a$  متناوب است ولی دارای کوچکترین دوره تناوب نیست.

$$y = \operatorname{tg} x \cdot \cot x \text{ متناوب و } T = \frac{\pi}{2} \text{ است زیرا } y = 1 \text{ بوده و } x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ می باشد.}$$

۱۰- هرگاه تابع  $g(x)$  متناوب و دارای دوره تناوب  $T$  باشد و  $f$  تابعی دلخواه باشد، آنگاه تابع  $f(g(x))$  نیز متناوب و با دوره تناوب  $T$  یا کمتر از آن است.

چند مثال: تابع  $f(x) = \log \sin x$  متناوب و  $T = 2\pi$  می باشد.

تابع  $f(x) = \sin(\cos x)$  متناوب و  $T = 2\pi$  می باشد.

تابع  $f(x) = \cos \cos x$  ،  $y = \cos \sin x$  متناوب و  $T = \pi$  می باشد.

۱۱- تابع معکوس مثلثاتی:

توابع  $y = \operatorname{Arcsin} x$  ،  $y = \operatorname{Arccos} x$  ،  $y = \operatorname{Arctg} x$  ،  $y = \operatorname{Arccot} x$  متناوب نیستند.

مثال:  $y = \operatorname{Arcsin} \cos x$  ،  $y = \operatorname{Arcsin} \sin x$  متناوب و  $T = 2\pi$  می باشد.

۱۲- هرگاه  $f(x)$  تابعی متناوب باشد آنگاه  $|f(x)|$  نیز متناوب است.

۱۳- اگر تابعی مانند  $f(x)$  متناوب باشد آنگاه  $f'(x)$  نیز متناوب است. (عکس این مطلب برقرار نیست مانند  $y = x$ )

۱۴- هرگاه قرینه آن قسمت را که زیر محور  $x$  ها قرار دارد، نسبت به محور  $x$  ها پیدا کنیم، برابر با آن قسمتی باشد که بالای محور  $x$  ها است، دوره تناوبش نصف می شود.

مثال: در توابع  $y = |\sin ax|$  و  $y = |\cos ax|$  و  $y = |\sin ax + \cos ax|$  دوره تناوب  $T = \frac{\pi}{|a|}$  است.

اما در توابع  $y = |\operatorname{tg} ax|$  و  $y = |\cot ax|$  دوره تناوب همان  $\frac{\pi}{|a|}$  است.

مثال: در توابع  $y = |\operatorname{tg} ax + \cot ax|$  و  $y = |\operatorname{tg} ax| + |\cot ax|$  و  $y = \operatorname{tg}^n ax + \cot g^n ax$  دوره تناوب

$$T = \frac{\pi}{2|a|} \text{ است.}$$

۱۵- اگر  $f(x)$  تابعی متناوب باشد، آنگاه  $f(|x|)$  متناوب نیست مگر اینکه  $f$  تابعی زوج باشد.

مثال:  $y = \sin|x|$  و  $y = \operatorname{tg}|x|$  و  $y = \cot g|x|$  متناوب نیستند ولی  $y = \cos|x|$  و  $y = \sin^2|x|$  متناوب هستند.

۱۶- پس از تعیین دوره تناوب، نصف مقدار  $T$  را در آن امتحان کنید، اگر صدق کند مقدار  $\frac{T}{2}$  دوره تناوب اصلی است.

۱۷- اگر  $f$  و  $g$  توابعی متناوب اما یکی دارای دوره تناوب گنگ و دیگری دارای دوره تناوب گویا باشد، حاصل جمع یا

تفاضل آنها معمولاً متناوب نیستند مگر در حالتی خاص. مثلاً توابع  $f(x) = a \sin \alpha x \pm b \sin \beta x$  یا

$f(x) = a \cos \alpha x \pm b \sin \beta x$  وقتی متناوب هستند که  $\frac{\alpha}{\beta}$  عددی گویا باشد.

نوارها

۱۶ - دوره تناوب  $T = \frac{2}{|a|}$  با  $y = (-1)^{[ax]}$  برابر است

۱۷ - هر خط  $y = m$  که دارای نقاط انفصال مساوی الفاصله باشد متناوب بوده و دارای کوچکترین دوره تناوب می باشد

$$y = \frac{1}{[x] + [-x]}$$

۱۸ - اگر یک نسبت مثلثاتی با کمان خود به صورت جمع - ضرب - تفاضل و تقسیم باشد، تابع متناوب نیست

$$f(x) = nx - [nx] \Rightarrow T = \frac{1}{n}$$

۱۹ - دوره تناوب توابع جزء صحیح

$$f(x) = \frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] \Rightarrow T = n$$

$$f(x) = [x] + [-x] \Rightarrow T = 1$$

$$f(x) = [nx] + [-nx] \Rightarrow T = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[-\frac{x}{n}\right] \Rightarrow T = n$$

$$f(x) = (-1)^{[x]} (x - [x]) \Rightarrow T = 2$$

$$f(x) = x - n \left[\frac{x}{n}\right] \Rightarrow T = n$$

تسلسل دورۀ تناوب :

۱- تابع  $f$  بر مجموعه اعداد حقیقی به وسیله  $f(x) = 3 \sin^2 \pi x + 2x - [2x]$  تعریف شده است. کوچکترین دورۀ تناوب این تابع کدامیک از اعداد زیر می باشد.

نارینا

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

۲- دورۀ تناوب  $y = \sin \frac{x}{\pi} + \cos 3x$  کدام است.

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $4\pi$

۳- یک دورۀ تناوب تابع  $f(x) = \sin \frac{\pi}{4} x + \sin \pi x$  برابر کدام است.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳)  $4\pi$  (۴) ۶

۴- دورۀ تناوب تابع  $f(x) = (-1)^{[\frac{x}{2}]} \cdot \cos x$  کدام است.

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳) ۳ (۴) ۴

۵- دورۀ تناوب تابع  $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$  کدام است.

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{\pi}{4}$

۶- دورۀ تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = (-1)^{[x]} (x - [x])$  کدام است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷- دورۀ تناوب تابع  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$  کدام است.

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴) متناوب نیست.

۸- دورۀ تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \cos \pi x + \operatorname{tg} 2x$  کدام است.

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $2\pi$  (۴) متناوب نیست.

۹- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  تابعی است.

(۱) با دورۀ تناوب  $2\pi$  است (۲) با دورۀ تناوب هر عدد گویا است (۳) با دورۀ تناوب هر عدد گویای غیر صفر است

(۴) متناوب نیست.

۱۰- تناوب اصلی تابع با ضابطه  $f(x) = 5x - [3x] - [2x]$  کدام است.

- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۱- اگر تناوب اساسی تابع با مضابطه  $f(x) = \sin 4\pi x + \cos 4\pi x + mx - [mx]$  برابر  $\frac{1}{2}$  باشد، کدام است

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $2\pi+1$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $2\pi$

۱۲- اگر تناوب اساسی تابع  $f$ ،  $T_1$  و تناوب اساسی تابع  $g$ ،  $T_2$  باشد،  $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$

و  $g(x) = \frac{1}{3}x - [\frac{x}{3}]$  در این صورت کدام گزینه درست است.

- (۱)  $T_1 = \frac{1}{3}$  (۲)  $T_2 = \frac{1}{3}$  (۳)  $T_1 = 1$  (۴)  $T_1 = T_2 = 3$

ن.  
۱۳

۱۳- تناوب اصلی تابع به معادله  $f(x) = [\frac{x}{4}] + [\frac{x}{3}] - \frac{5x}{6}$  برابر است با

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $6$  (۳)  $12$  (۴)  $\frac{1}{12}$

۱۴- تناوب اساسی تابع به معادله  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$  برابر است با

- (۱)  $1$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $2$  (۴) تابع متناوب نیست.

۱۵- اگر  $T > 0$ ،  $f(x+T) = -f(x)$ ،  $\forall x \in \mathbb{R}$ ، آنگاه تناوب اساسی تابع  $f$  کدام است.

- (۱)  $2T$  (۲)  $T$  (۳)  $\frac{T}{2}$  (۴) تابع متناوب نیست.

۱۶- دوره تناوب  $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x) + [2x] - 2x$  کدام است.

- (۱)  $4$  (۲)  $3$  (۳)  $2$  (۴)  $5$

۱۷- دوره تناوب  $f(x) = \sin(\cos[x])$  کدام است.

- (۱) متناوب نیست (۲)  $1$  (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

۱۸- دوره تناوب  $y = |\cos x| + \sin|x|$  کدام است.

- (۱) متناوب نیست (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\pi$

۱۹- دوره تناوب  $f(x) = 2[\frac{x}{2}] - 3[\frac{x}{3}]$  کدام است.

- (۱)  $6$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴) متناوب نیست.

۲۰- دوره تناوب  $y = \cos|x| + |\sin x|$  کدام است. (۱)  $2\pi$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴) متناوب نیست

۲۱- کوچکترین دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  کدام است (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\pi$  (۴)  $2\pi$

۲۲ - اگر  $f$  تابعی باشد که  $f(x+\pi) = \frac{1}{f(x)}$  آنگاه  $f$  تابعی :

(۱) متناوب با دوره تناوب  $\pi$  است

(۲) متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است .

(۳) متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد

(۴) متناوب نیست .

۲۳ - اگر  $f$  تابعی باشد که  $f(x+\pi) = -f(x)$  آنگاه  $f$  تابعی

(۱) متناوب با دوره تناوب  $\pi$  است

(۲) متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است .

(۳) متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد

(۴) متناوب نیست .

۲۴ - تابع  $f(x) = \sin x \cdot \sin rx$  مفروض است . دوره تناوب آنرا معلوم کنید

۲۵ - دوره تناوب  $y = \sin\left(\frac{\pi}{p}[x]\right)$  کلام است .