

سوالات آزمون نهایی درس ریاضیات گسسته رشته ریاضی زیر دهم

خرداد ماه ۹۸

کاری از گروه ریاضی شاهین شهر

مجموعه ای برای دانش آموزان پایه دوازدهم

در این مجموعه سوالات آزمون و راهنمای تصحیح هر سوال به تفکیک سوالات به همراه نکاتی که شما بایستی بدانید تا توانایی پاسخ گویی به سوالات را به نحو احسن به دست آورده و در حدی که در راهنمای تصحیح بیان شده و مد نظر مصححین است پاسخگو باشید.



مطالعه نکات بیان شده در اکثر موارد منحصر به سؤال مربوطه نیست و در سؤالات دیگر آزمون های نهایی درس **ریاضیات گسسته** کارایی فراوانی دارد و نکات بیان شده تا حدودی کلیت مباحث مطرح شده در کتاب را پشتیبانی می کند.

مجموعه سوالات آزمون نهایی  
ریاضیات گسسته  
شماره

تعداد صفحات: ۲	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی:	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵	رشته: ریاضی فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://ace.medu.ir">http://ace.medu.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد. ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل ..... راس برای احاطه همه رئوس لازم است. ج) اگر در گراف $G$ از مرتبه $p$ داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر ..... است. د) مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.	۲
۳	اگر باقی مانده تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادله سیاله خطی $x + 2y = 18$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف $G$ می باشد. الف) مرتبه و اندازه گراف $G$ را بنویسید. ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. ج) مجموع درجه های رأس های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.	۱/۵
۷	گراف $C_V$ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. ب) عدد احاطه گری $C_V$ را به دست آورید. ج) دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟ ب) در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.	۱/۵
« بقیه سوالات در صفحه دوم »		

تعداد صفحات: ۲	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی:	سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵	رشته: ریاضی فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://ace.medu.ir">http://ace.medu.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۹	الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت.	۱
۱۱	۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0, i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هریک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هرکت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	" موفق باشید "	جمع نمره
		۲۰

## توجه توجه !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

دانش آموز عزیز و گرامی دقت بفرمایید در صفحات بعدی ابتدا یک سوال مطرح می شود... به دنبال آن حل سوال به گونه ای که در راهنمای تصحیح بیان شده است و در واقع حلی است که مد نظر طراح سوال بوده است و پیرو هر حل سوال نکات یا به نوعی تحلیل سوال برای شما مطرح شده است که این نکات همان اطلاعاتی است که شما بایستی بدانید تا حل مربوطه را ارائه دهید.

ریاضی  
مشاهین  
شمار

۱- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن ها کمتر نیست.

(حل)

اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود (۰/۵)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

گزاره اخیر همیشه درست است.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ .

(صفحه ۷)

نکات:

در مورد پاسخگویی به سؤالاتی که از طریق استدلال (اثبات) بازگشتی هستند توجه به این نکته مهم است که در تمامی مراحل علامت دوشرطی یعنی  $\Leftrightarrow$  را قید کنید که نشان دهید اثبات فرم بازگشتی دارد، در ضمن ذکر جمله انتهایی در کنار عبارت آخر یعنی جمله «گزاره همیشه درست است» نیز الزامی است، هرچند که ملاحظه می فرمایید بارمی برای آن در نظر گرفته نشده است ولی اگر به این موارد توجه نداشته باشید از شما نمره کسر خواهد شد.

توجه کنید در مورد این سؤال استدلال مشابه استدلال بیان شده ی فوق که به صورت زیر بیان شده است هم مورد قبول خواهد بود.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

این گزاره همواره درست است.

در زمان مطالعه دقت بفرمایید که در عبارت آخر در راهنمای تصحیح ارائه شده در سایت سنجش آموزش و پرورش + بایستی - باشد، (یک اشتباه تایپی است) که البته در این جا اصلاح شده است.

۲- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

(الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد.

(ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با  $\Delta = 3$  حداقل ..... رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

(ج) اگر در گراف  $G$  از مرتبه  $p$  داشته باشیم  $\gamma(G) = 1$  در این صورت  $\Delta(G)$  برابر ..... است.

(د) مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.

حل

(الف) ۲۸ (۰/۵) (ب) ۳ (۰/۵) (ج)  $p-1$  (۰/۵) (د) ۱۵ (۰/۵)

(صفحه ۳۸ و ۴۹ و ۵۳ و ۶۲)

نکات:

گاهی اوقات جاهای خالی را که قرار است شما تکمیل کنید فقط نوشتن صرف یک سری حروف و کلمات و عبارات و اعدادی نمی باشند که سریع آن ها را بخواهید در جای خالی قرار دهید! بلکه مانند این سؤال نیاز به استدلال و محاسباتی هست که بایستی انجام پذیرد! در حد یک پیشنهاد؛ درست است که سؤالات به صورت جای خالی اند، اما اگر دیدید به جواب انتهایی دلچسبی نمی رسید ولی راه حل را بلد هستید در پاسخنامه خود راه حل را هر چند ناقص ذکر کنید.

$$q(k_p) = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \xrightarrow{p=8} q(k_8) = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \rightarrow 28$$

$$\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \xrightarrow{\substack{n=10 \\ \Delta=3}} \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = \lfloor 2.5 \rfloor = 2 \leq \gamma(G) \rightarrow 3$$

$$\deg(v) = 1 \rightarrow p-1 = \Delta \rightarrow p-1$$

$$1+2+3+4+5=15 \rightarrow 15$$

(زیرا در هر سطر (یا ستون) هر مربع لاتین  $5 \times 5$  هر رقم یکبار ظاهر می شود)



۳- اگر باقیمانده تقسیم  $m$  و  $n$  بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیمانده تقسیم عدد  $5n-3m$  بر ۱۳ را بدست آورید.

(حل)

$$\begin{array}{l} m=13q_1+2 \quad 3m=13(3q_1)+6 \\ n=13q_2+9 \quad 5n=13(5q_2)+45 \end{array} \quad \begin{array}{l} (0/5) \longrightarrow 5n-3m=13q'+39 \quad (0/25) \longrightarrow 5n-3m=13q''+0 \longrightarrow r=0 \quad (0/25) \end{array}$$

(صفحه ۱۴)

نکات:

گاهی اوقات و با احتمال بالا سؤالاتی یا سؤالی مطرح می شود که بایستی از قضیه تقسیم و رابطه تقسیم مربوطه به آن استفاده کرد.

قضیه تقسیم:  $a=bq+r$  که در آن باید  $0 \leq r < |b|$  که اگر  $b \in \mathbb{N}$ ؛  $|b|=b$  که  $a$  مقسوم و  $b$  مقسوم علیه و  $q$  خارج قسمت و  $r$  باقیمانده خواهند بود.

در این سؤال مطرح شده کافی است  $5n-3m$  ساخته شود و با توجه به شرط باقی مانده، باقیمانده مدنظر را یافت. در اینگونه سؤالات توجه به شرط باقیمانده یعنی  $0 \leq r < |b|$  حائز اهمیت است.

$$5n-3m=13q'+39=13(q'+3)=13q'' \quad \text{در حل بیان شده دقت کنید که:}$$

یعنی توجه داشته باشید که: در تقسیم بر ۱۳ معرفی ۳۹ به عنوان باقیمانده خطاست، زیرا در شرط باقیمانده بر ۱۳ صدق نمی کند.

۴- اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد در این صورت با استفاده از همنهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم: (۰/۲۵)

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \equiv ۵ \pmod{۷} \quad (۰/۵)$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد. (۰/۲۵)

(صفحه ۲۴)

نکات:

در حل سؤالاتی این چنین؛ در واقع سؤالات تقویمی که به کمک همنهشتی ها قابل بیان و حل هستند باید به این نکته توجه کنید که مبدأ را صفر فرض می کنیم و مانند جدول ترسیمی جدولی کشیده می شود و روز مربوط به صفر یعنی همان روز مبدأ بیان شده در صورت سؤال را قرار می دهیم و مابقی ۶ روز هفته باقیمانده را از ۱ تا ۶ شماره گذاری می کنیم؛ از مبدأ موجود در صورت سؤال شروع کرده روزها و ماه ها را بررسی کرده تا به مقصود سؤال برسیم؛ یک عدد خواهیم داشت که باید باقیمانده آن را بر ۷ بیابیم؛ نتیجه باقیمانده یکی از ارقام ۰ تا ۶ خواهد بود؛ روز مربوطه به باقیمانده پاسخ سؤال خواهد بود. (توضیحات داده شده را بر روی حل سؤال مطرح شده بالا پیاده سازی کنید.)

توجه کنید گاهی اوقات مانند حل سؤال ۱۶ در انتهای فصل یک کتاب گسسته لازم است شما به عقب برگردید و اعداد شمارشی تا مقصود را منفی در نظر بگیرید! چرا که در آن سؤال بهمن ماه، ماه بعد از مردادماه است! و نه قبل از آن؛ در سؤال (۴) این آزمون دقت کنید بهمن ماه، ماه بعد از مهرماه است.

۵- با تبدیل معادله سیاله خطی  $5x+2y=18$  معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.

حل

$$(0/25) \quad 2y \equiv 18 \xrightarrow{\substack{(-2,5)=-1 \\ \div 2}} y \equiv 9(0/5) \longrightarrow y \equiv 9 \equiv 4(0/25) \longrightarrow y \equiv 4$$

$$y = 5k + 4(0/25) \quad , \quad x = -2k + 2(0/25)$$

(صفحه ۲۵)

نکات:

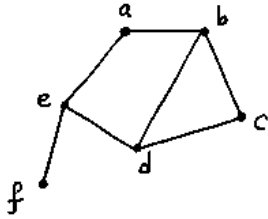
دقت دارید که هر معادله سیاله را می توان به دو معادله هم‌نهشتی تبدیل کرد و سپس به کمک ویژگی های هم‌نهشتی معادله مربوطه را حل کرد. مثلاً در این سؤال  $5x+2y=18$  را می توان به دو معادله هم‌نهشتی  $2y \equiv 18$  یا  $5x \equiv 18$  تبدیل کرد و معادله را حل نمود. دقت کنید در انتها که جواب ها را بر حسب  $k \in Z$  بدست می آورید بد نیست در معادله سیاله اولیه قرار دهید و جواب های حاصل برای  $x$  و  $y$  را کنترل نمایید. در اینجا برای تمرین به حل  $5x \equiv 18$  می پردازیم:

$$\text{شما} \quad 5x \equiv 18 \longrightarrow 5x - 2x(2) \equiv 18 - 9(2) \longrightarrow x \equiv 0 \longrightarrow x = 2k, k \in Z \xrightarrow{5x+2y=18} y = 9 - 5k, k \in Z$$

کنترل کنید.

توجه کنید در حل های بیان شده زمانی که یکی از مجهولات را بر حسب  $k$  به دست می آورید با قرار دادن آن در معادله اصلی داده شده مجهول دیگر را بر حسب  $k$  به دست خواهید آورد.

۶- شکل مقابل نمودار گراف  $G$  می باشد.



الف) مرتبه و اندازه گراف  $G$  را بنویسید.

ب) مجموعه  $N_G(b)$  را بنویسید.

ج) مجموع درجه های رأس های گراف  $\bar{G}$  را مشخص کنید.

حل

الف)  $p = 6$  (۰/۲۵),  $q = 7$  (۰/۲۵) ب)  $N_G(b) = \{a, d, c\}$  (۰/۲۵)

ج)  $\text{تعداد یال های گراف } G + \text{تعداد یال های گراف } \bar{G} = \frac{p(p-1)}{2} (۰/۲۵)$

$16 (۰/۲۵) = \text{مجموع درجه های رأس های گراف } \bar{G} \Rightarrow 8 (۰/۲۵) = \text{تعداد یال های گراف } \bar{G}$

(صفحه ۴۱)

نکات:

می دانیم مرتبه  $p = \text{تعداد نقاط (رئوس)}$  و اندازه  $q = \text{تعداد یالها (پاره خط ها)}$  و  $N_G(v)$  همسایگی با رأس  $v$  و  $N_G[v]$  همسایگی بسته رأس  $v$  است.

توجه دارید که  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ .

در ضمن  $q(\bar{G}) + q(G) = q(K_p)$  که این همان رابطه ی نوشته شده در پاسخ (ج) است.

در اینجا موارد (الف) و (ب) که واضح اند (ببینید چگونه نوشته شده اند!)

فقط در مورد (ج) دقت کنید:

$$q(\bar{G}) + 7 = \frac{6(5)}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 15 - 7 = 8 \Rightarrow \sum_G \deg(v_i) = 2q(\bar{G}) = 2(8) = 16$$

می دانیم: قضیه- مجموع درجات رئوس در هر گراف ساده دو برابر اندازه (تعداد یالها) است.

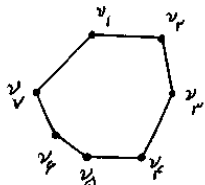
۷- گراف  $C_7$  را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(الف) یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.

(ب) عدد احاطه گری  $C_7$  را به دست آورید.

(ج) دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.

(حل)



(صفحه ۴۵)

(الف)  $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  (ب)  $\gamma(G) = 3$  (ج)  $\{v_1, v_3, v_5\}$  و  $\{v_2, v_4, v_6\}$

نکات:

در این سؤال شما باید  $C_n$  ها را بشناسید (دور به طول  $n$ ) در ضمن با مفاهیم مجموعه ی احاطه گر و عدد احاطه گری و مجموعه ی احاطه گر مینیمم آشنایی داشته باشیم. در مورد (الف) دقت کنید که شما می توانید مجموعه های درست دیگری را هم معرفی کنید مثلاً  $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  یا  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  و... نیز مورد قبول هستند. در مورد قسمت (ج) توجه دارید که

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \text{ پس داریم:}$$

$$\gamma(C_7) = \left\lceil \frac{7}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3$$

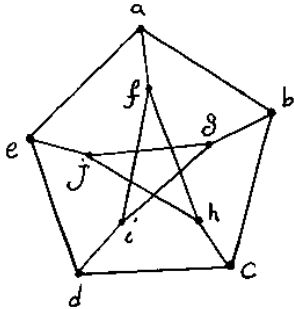
به طور کلی در مورد  $C_n$  ها، بزرگترین درجه  $(\Delta)$  یا درجه ی هر رأس ۲ می باشد پس:  $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ .

در مورد قسمت (ج) توجه دارید که تعریف مجموعه ی احاطه گر مینیمم مهم است؛ در بین تمام مجموعه های احاطه گر؛ مجموعه هایی که کمترین تعداد عضو را دارند. تعداد اعضای چنین مجموعه ای را عدد احاطه گری گراف می نامند و با  $\gamma$  یا  $\gamma(G)$  نمایش می دهند.

در این قسمت هم شما می توانید مجموعه های درست دیگری را هم معرفی کنید مثلاً  $\{v_2, v_4, v_5\}$  یا ... تذکر: به طور کلی مفاهیم عدد احاطه گری و مجموعه های احاطه گر مینیمم و مینیمال پای ثابت سؤالات آزمون نهایی خواهند بود؛ خوب با این مفاهیم ارتباط برقرار کنید و سؤالات زیادی در این زمینه ها حل کنید تا بر موضوعات مسلط گردید.

۸- الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیرمینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد.

ب) در گراف روبرو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



حل

الف) اگر  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال باشد، در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن ها مجموعه احاطه گر مینیمال باقی می ماند. (۰/۲۵) بنابراین عضوی مانند  $a_1$  را در نظر می گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم (۰/۲۵) در غیراین صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم. (۰/۲۵)

(صفحه ۴۶)

$$A = \{h, g, f, i, j\}$$

ب) (۰/۷۵)

نکات:

در این سؤال شما باید تعریف مجموعه ی احاطه گر مینیمال را خوب درک کرده باشید.

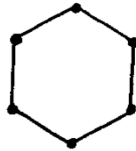
یک مجموعه احاطه گر را مینیمال گوییم هرگاه با حذف هر یک از راسهایش دیگر احاطه گر نباشد.

قسمت (الف) که روند اثباتی است (بررسی کنید) و اما در مورد قسمت (ب) توجه کنید شما می توانید موارد درست مختلفی را ارائه دهید! در راهنمای تصحیح (پاسخ ارائه شده) رئوس ستاره داخلی لحاظ شده است شما می توانید رئوس پنج ضلعی بیرونی را در نظر بگیرید یعنی  $\{a, b, c, d, e\}$  هم پاسخ صحیح است یا هر مجموعه ی ۵ عضوی متشکل از تعدادی از رئوس ستاره یا تعدادی از رئوس پنج ضلعی، فقط با دقت انتخاب کنید که شرط مجموعه ی احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را حفظ کند. (این تلاش را انجام دهید!)

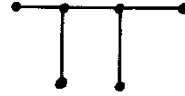
۹- الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.  
 ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

حل

(صفحه ۵۳)



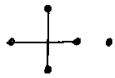
ب) (۰/۵)



الف) (۰/۵)

نکات:

در این گونه سؤالات گاهی شما می توانید شکل های مختلف و متفاوت فراوانی را ترسیم کنید.  
 فقط هرگاه در نگاه اول یا با تفکر بیشتر شکلی (گرافی) را ترسیم کردید؛ دوباره از روی صورت سؤال موارد را با توجه به شکل (گراف) ترسیمی خود بررسی کنید، تا اطمینان حاصل کنید که شرایط سؤال را رعایت کرده اید.  
 در اینجا به عنوان مثال می توانید



برای مورد عنوان شده در قسمت الف) گراف مقابل

و



برای مورد عنوان شده در قسمت ب) گراف مقابل

را نیز رسم کنید. (یک بار دیگر صورت سؤال را بخوانید و گراف های رسم شده را بررسی کنید)

تمرین: تلاش کنید ببینید می توانید پاسخ های دیگری برای قسمت الف) و قسمت ب) ارائه دهید یا خیر!؟

۱۰- با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت.

(حل)

$$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} (0/75) \longrightarrow P = 3 \times 7! (0/25)$$

(صفحه ۵۸)

نکات:

این گونه سؤالات که در آن ها ارقام یا حروف تکراری موجود است را باید به کمک « قضیه ی جایگشت های با تکرار » حل نمود.

۹ رقم  $\longrightarrow$  ۵ و ۴ و ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱

اگر وقت آزمون اجازه داد ساده کنید ؛ یعنی بهتر است جواب نهایی را محاسبه نفرمایید.  
فقط در صورتی که برای سؤالات دیگر زمان از دست ندهید این کار را حتما انجام دهید.

$$p = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \longrightarrow p = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 3 \times 7! = 15120$$



۱۱- ۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چندطریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که :

(الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

(ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند.

(ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.

(حل)

(الف)  $۵! \times ۶!$

(ب)  $۵! \times ۷!$

(ج)  $۱۰! \times ۲!$

(صفحه ۵۷)

نکات:

این گونه سؤالات را با تصاویری ساده می توانید برای خودتان قابل فهم تر نمایید. در مورد سؤال مطرح شده به موارد زیر توجه کنید.

(الف) ●\*●\*●\*●\*●\*●\*●\*

۵! برای \* ها

۶! برای ● ها

پاسخ:  $۵! \times ۶!$

(ب) ●●●●●●●●\* \* \* \* \*

۵! برای \* ها

(ج) \* \* \* \* \* ●●●●●●●●\* \* \* \* \*

۷! برای ● ها با \* \* \* \* \*

پاسخ:  $۵! \times ۷!$

(ج) \* \* \* \* \* ●●●●●●●●\* \* \* \* \*

۲! برای \* \* \* \* \*

۱۰! برای کل

پاسخ:  $۱۰! \times ۲!$

۱۲- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$  با شرط  $x_i > 0$  و  $i = 2, 3, 4, 5$  را محاسبه کنید.

حل

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \left( \cdot / 25 \right) \xrightarrow{\left( \frac{n+k-1}{k-1} \right)} \left( \frac{6+5-1}{5-1} \right) \left( \cdot / 5 \right)$$

(صفحه ۷۲)

نکات:

در حل اینگونه سؤالات توجه به شرایط داده شده حائز اهمیت است. در کل اگر جواب های صحیح و نامنفی (حسابی) خواسته شده باشد فرمول تعداد جواب ها  $\binom{n+k-1}{k-1}$  و اگر جواب های صحیح و مثبت (طبیعی) مدنظر باشد فرمول تعداد جواب ها  $\binom{n-1}{k-1}$  خواهد بود.

در این سؤال دقت کنید تعداد جواب های صحیح و نامنفی خواسته شده است اما با شرط های اعمال شده فقط  $x_1 \geq 0$  خواهد بود! یعنی برای  $i=2,3,4,5$  داریم  $x_i > 0$  این شرط در مجموعه ی اعداد صحیح با شرط  $x_i \geq 1$  معادل است و با در نظر گرفتن  $y_i = x_i - 1 \geq 0$  در این موارد است که حل سؤال ادامه یافته است، یعنی به جز  $x_1$  برای بقیه  $x_i = y_i + 1$  را در معادله ی داده شده قرار می هیم.

دقت کنید در حل این سؤال چون بارم گذاری نمره کم بوده است در راهنمای تصحیح از نوشتن موارد ذکر شده ی بالا صرف نظر شده است!

شما بایستی در هر صورت تا حد ممکن حل های خود را دقیق و بی کم و کاست انجام دهید.

۱۳- اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟

(حل)

(صفحه ۶۹)

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

(۰/۵)

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

(۰/۵)

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

(۰/۵)

نکات:

این سؤال، پرسشی است در مورد کاربرد مربع های لاتین مرتبط با مبحث مربع های لاتین متعامد؛ که مشابه این سؤال، مثالی است که در کتاب درسی شما در مورد کارگراها و ماشین های نخ ریزی و الیاف و روزهای هفته بیان شده است که در آنجا یافتن مربع های لاتین متعامد  $4 \times 4$  مد نظر می باشد. در سؤال مطرح شده که مربوط به کار در کلاس مطرح شده در کتاب درسی است، هدف یافتن دو مربع لاتین متعامد  $3 \times 3$  می باشد.

برای ترسیم مربع های لاتین متعامد  $n \times n$  که  $n$  فرد (بزرگتر از یک) است می توانید از روش گفته شده در کتاب درسی که مراحل یافتن آن برای  $n=5$  مطرح شده است بهره بگیرید.

۱۴- در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند.

حل

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۸۴)

$$n(A \cup B) = \left[ \frac{۹۰}{۲} \right] + \left[ \frac{۹۰}{۳} \right] - \left[ \frac{۹۰}{۶} \right] \quad (۰/۷۵) \quad n(A \cup B) = ۶۰ \quad (۰/۲۵)$$

نکات:

در ابتدا یک تذکر ضروری را با یک سؤال و پاسخ بیان می کنیم.

سؤال: از بین اعداد ۱ تا  $n$  چه تعداد عدد بر  $k$  بخش پذیرند؟

پاسخ: جز صحیح  $\frac{n}{k}$  یعنی  $\left[ \frac{n}{k} \right]$ .

در اینجا سؤال مطرح شده سؤال بسیار ساده ای خواهد بود که به کمک اصل شمول (اصل شمول - عدم شمول) برای دو مجموعه به سادگی حل پذیر خواهد بود؛ توجه دارید که  $n(A \cup B) = |A \cup B|$  و ...

در ضمن  $n(A \cap B) = |A \cap B|$  که در این جا منظور از آن اعدادی هستند که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند یعنی اعدادی که بر ۶ بخش پذیرند.

توجه: اصل شمول - عدم شمول برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  به صورت زیر می باشد:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

۱۵- ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموزان مشغول به تحصیل باشند، حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

(حل)

تعداد لانه ها :  $۷ \times ۱۲ = ۸۴$  (۰/۲۵) تعداد کیبوترها : ۵۰۵ دانش آموز (۰/۲۵)

$$\begin{array}{r} ۵۰۵ \\ -۵۰۴ \\ \hline ۱ \end{array} \quad ۶+۱=۷ \quad (۰/۵)$$

طبق اصل لانه کیبوتری حداقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)

(صفحه ۸۴)

نکات:

در حل سؤالات مربوط به اصل لانه کیبوتری توجه به این نکته بسیار مهم و حائز اهمیت خواهد بود که شما حتماً بایستی به صراحت و روشنی مشخص بفرمایید که منظور از لانه و منظور از کیبوتر کدام مشخصه در سؤال است و تعداد هر یک را به وضوح بیان کنید.

در این سؤال:

تعداد لانه ها =  $۷ \times ۱۲ = ۸۴$  → لانه ها = حالات روزهای هفته برای ماه ها

تعداد کیبوترها = ۵۰۵ → کیبوترها = تعداد دانش آموزان

در ضمن نوشتن تقسیم و نوشتن جمله ی انتهایی پاسخ بسیار مهم است (یعنی اشاره به اصل لانه کیبوتری). دقت کنید در سؤالات هندسی مرتبط با اصل لانه کیبوتری ترسیم شکل و محاسبات هندسی و محاسبات جبری مهم و حائز اهمیت است.

(در سؤالات مشابه به این مورد خوب توجه کنید و برای مرور این گونه سؤالات هندسی به کتاب مراجعه کنید)



توجه!  
توجه!  
توجه!  
توجه!

## اطلاعیه مهم آموزش

دانش آموز گرامی دقت بفرمایید

بعد از دیدن سؤالات و بررسی هر سؤال به همراه حل مربوطه و نکات ارائه شده ی بعد از آن، اکنون در ادامه راهنمای تصحیح مربوطه ارائه شده توسط طراحان، برای شما به صورت کامل آورده شده است.

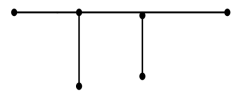
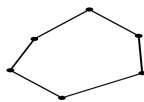
شما بایستی برای هر سری دیگر از سؤالات امتحانات نهایی (کشوری) یک چنین فرایندی را در ذهن مرور کنید؛ یعنی هر راه حل ارائه شده در راهنمای تصحیح را که می بینید به نکات و مباحث درسی جنبی آن خوب توجه کنید؛ این کار باعث تسلط و مرور چندین باره بر مباحث درسی خواهد شد و در نهایت موفقیت بیشتر شما عزیزان را در آزمون نهایی رقم خواهد زد.

موفق و پیروز و سربلند باشید.

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح		نمره

۱	<p>اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود (۰/۵) <math>\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}</math> (صفحه: ۷)</p> <p>گزاره همیشه درست <math>\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b-2\sqrt{ab}}_{(0/25)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}_{(0/25)} \geq 0</math></p>	۱														
۲	الف) ۲۸ (۰/۵) ب) ۳ راس (۰/۵) ج) $p-1$ (۰/۵) د) ۱۵ (۰/۵) (صفحه: ۳۸ و ۴۹ و ۵۳ و ۶۲)	۲														
۱/۵	<p><math>m = 13q_1 + 2</math> (۰/۵) <math>3m = 13(3q_1) + 6</math> (۰/۵) <math>5n - 3m = 13q' + 39</math> (۰/۲۵) (صفحه: ۱۴)</p> <p><math>n = 13q_2 + 9</math> (۰/۵) <math>5n = 13(5q_2) + 45</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \rightarrow r = 0</math> (۰/۲۵)</p>	۳														
۱	<p>روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر میگیریم ۲۹ روز درمهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم: (۰/۲۵)</p> <p><math>29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5 \pmod{7}</math> (۰/۵)</p> <p>که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)</p> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>ش</td><td>ی</td><td>د</td><td>س</td><td>چ</td><td>پ</td><td>ج</td> </tr> <tr> <td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td> </tr> </table>	ش	ی	د	س	چ	پ	ج	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۴
ش	ی	د	س	چ	پ	ج										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۱/۵	<p><math>2y \equiv 18 \pmod{25} \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 9 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{25}</math> (صفحه: ۲۵)</p> <p><math>y = 5k + 4</math> (۰/۲۵) و <math>x = -2k + 2</math> (۰/۲۵)</p>	۵														
۱/۵	<p>الف) <math>p=6</math> (۰/۲۵) , <math>q=7</math> (۰/۲۵) ب) <math>N_G(b) = \{a, d, c\}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ج) <math>\text{تعداد یال های یال های } G + \text{تعداد یال های یال های } \bar{G} = \frac{p(p-1)}{2} \pmod{25}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\bar{G}</math> مجموع درجه های رئوس <math>\bar{G}</math> گراف <math>\Rightarrow 16 = \text{تعداد یال های یال های } \bar{G}</math> (۰/۲۵) (صفحه: ۴۱)</p>	۶														
۱/۵	<p>الف) <math>\gamma(G) = 3</math> (۰/۵) ب) <math>\{v_1, v_3, v_4, v_5\}</math> (۰/۵) ج) <math>\{v_2, v_4, v_6\}</math> و <math>\{v_1, v_3, v_5\}</math> (۰/۵) (صفحه: ۴۵)</p>	۷														

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲۵		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۸	
نمره	راهنمای تصحیح		ردیف

۱/۵	الف) اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه گر مینمال باقی می ماند. (۰/۲۵) بنا بر این عضو $a_1$ را در نظر میگیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم (۰/۲۵) در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم. (۰/۲۵) ب) $A = \{h, g, f, i, j\}$ (۰/۷۵) (صفحه: ۴۶)	۸																																																
۱	الف)  (الف) (۰/۵) ب)  (ب) (صفحه: ۵۳) (۰/۵)	۹																																																
۱	$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} \rightarrow P = 3 \times 7! \quad (0/25)$ (صفحه: ۵۸) (۰/۷۵)	۱۰																																																
۱/۵	الف) $5! \times 6!$ (۰/۵) ب) $5! \times 7!$ (۰/۵) ج) $10! \times 2!$ (۰/۵) (صفحه: ۵۷)	۱۱																																																
۱	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 = 10$ $x_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6 \quad (0/25) \xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{6+5-1}{5-1} \quad (0/5)$ (صفحه: ۷۲)	۱۲																																																
۱/۵	<table border="1" data-bbox="199 1332 558 1467"> <tr><th></th><th>دو تاییه</th><th>یک تاییه</th><th>شبه</th></tr> <tr><td>A</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>B</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>C</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1" data-bbox="614 1332 941 1467"> <tr><th></th><th>دو تاییه</th><th>یک تاییه</th><th>شبه</th></tr> <tr><td>A</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>B</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>C</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> $\rightarrow$ <table border="1" data-bbox="1069 1332 1428 1467"> <tr><th></th><th>دو تاییه</th><th>یک تاییه</th><th>شبه</th></tr> <tr><td>A</td><td>۳۳</td><td>۲۱</td><td>۱۲</td></tr> <tr><td>B</td><td>۲۲</td><td>۱۳</td><td>۳۱</td></tr> <tr><td>C</td><td>۱۱</td><td>۳۲</td><td>۲۳</td></tr> </table> (صفحه: ۶۹) (۰/۵)		دو تاییه	یک تاییه	شبه	A	۳	۲	۱	B	۲	۱	۳	C	۱	۳	۲		دو تاییه	یک تاییه	شبه	A	۳	۱	۲	B	۲	۳	۱	C	۱	۲	۳		دو تاییه	یک تاییه	شبه	A	۳۳	۲۱	۱۲	B	۲۲	۱۳	۳۱	C	۱۱	۳۲	۲۳	۱۳
	دو تاییه	یک تاییه	شبه																																															
A	۳	۲	۱																																															
B	۲	۱	۳																																															
C	۱	۳	۲																																															
	دو تاییه	یک تاییه	شبه																																															
A	۳	۱	۲																																															
B	۲	۳	۱																																															
C	۱	۲	۳																																															
	دو تاییه	یک تاییه	شبه																																															
A	۳۳	۲۱	۱۲																																															
B	۲۲	۱۳	۳۱																																															
C	۱۱	۳۲	۲۳																																															
۱/۲۵	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (0/25)$ $n(A \cup B) = \left[ \frac{90}{2} \right] + \left[ \frac{90}{3} \right] - \left[ \frac{90}{6} \right] \quad (0/75) \quad n(A \cup B) = 60 \quad (0/25)$ (صفحه: ۸۴)	۱۴																																																
۱/۲۵	تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش آموز (۰/۲۵) $505 \quad   \quad 84$ $-504 \quad 6$ $\hline 1$ $6+1=7 \quad (0/5)$ تعداد لانه ها: $7 \times 12 = 84$ (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)	۱۵																																																

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»